Taki Academy
www.takiacademy.com

MAGAZINES

Mathématiques

Bac Sc-Techniques

Magazine N°4 : Limite et continuité

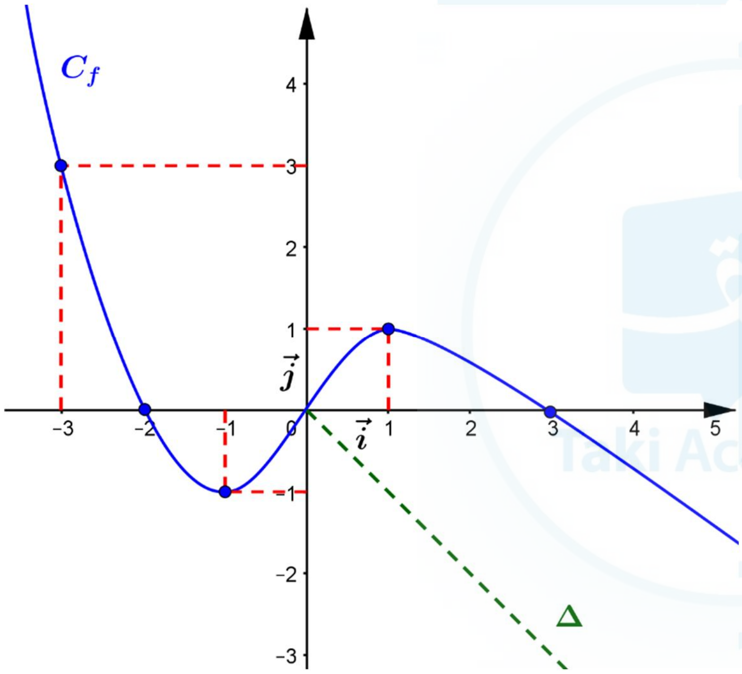
TakiAcademy

تهنى على قرايتك

Exercice 1 — 25 min — 6.5 pts

Soit f la fonction définie et continue sur IR et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous et soit g la fonction définie et continue en tout points de $IR \setminus \{3\}$ et dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

- C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de $\Delta : y = -x$.
- C_g admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique $\Delta' : y = -2x - 3$.



x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
g	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↗	3

1°) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+x]$ et $f([0,+\infty[)$.

b) Déterminer $g(]-\infty,-1])$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{1}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^-} g\circ f(x)$.

2°) Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = (x-3)\sin\left(\dfrac{\pi}{x-3}\right) & \text{si } x < 3 \\ h(x) = \dfrac{4}{g(x)} & \text{si } 3 < x \le 4 \\ h(x) = \sqrt{x^2+2x-8} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

C_h étant la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) h est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

b) Montrer que h est continue en 4.

c) Montrer que C_h admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale qu'on précisera.

d) Montrer que C_h admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique qu'on précisera.

e) Montrer que l'équation $h(x)=1$ admet au moins une solution dans $[1,2]$.

Exercice 2 — 25 min — 5 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$\begin{cases} f(x)=x.\sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x\in\left]-\infty;1\right]\setminus\{0\} \\ f(x)=\sqrt{x^2+8}-x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\infty;1\right]\setminus\{0\}$, on a: $|f(x)|\leqslant|x|$.

b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 .

2) Montrer que f est continue en 1 .

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution $\alpha\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

b) Vérifier que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)=-\dfrac{\sqrt{4\alpha^2-1}}{2\alpha}$

5) Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $]1;+\infty[$.

b) Déterminer la limite de g à droite en 1 .

Exercice 3 — 25 min — 5 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a: $\left|f(x) - 1\right| \leq \left|x\right|$.

b) Montrer que f est continue en 0

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $]0,1[$.

2) Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous, et telle que $g(0) = 1$ et $0 < g(-1) < \alpha$.

x	$-\infty$	$+\infty$
g	0	$+\infty$

On considère la fonction h définie par $h(x) = (f \circ g)(x)$

a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $h(-1) > 0$

c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une solution unique β dans l'intervalle $]-1,0[$.

d) Montrer que $\alpha = g(\beta)$.

Exercice 4 — 25 min — 5 pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left[-\frac{\pi}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin x} & \text{si } -\frac{\pi}{2}\leq x<0\\ x+\sqrt{x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$.

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

b) Montrer que f est continue sur I .

c) Donner la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) Déterminer $f([0,+\infty[)$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=-\frac{1}{2}$ admet au moins une solution α dans $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4) Soit la fonction $h=g\circ f$ avec $g(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{2x+1}$.

a) Montrer que h est définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\alpha\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$.

b) Montrer que h est prolongeable par continuité en α.

Exercice 5 25 min **5 pts**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction g définie sur IR^* par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

(C_g) étant sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Etudier la parité de g.

2°) a) Vérifier que pour tout $x\neq 0$, $g(x)=2\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$.

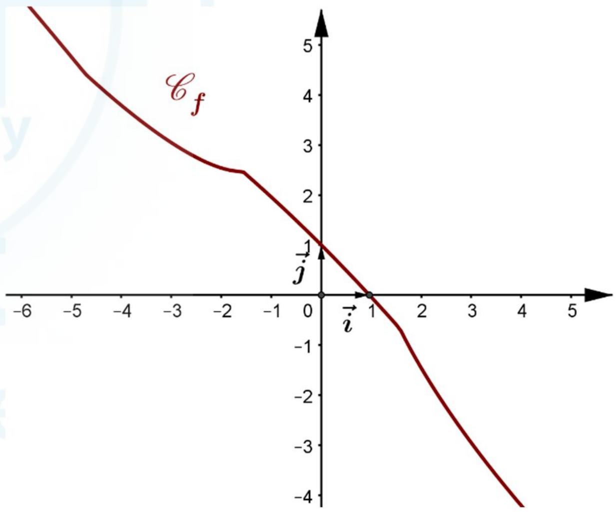
b) Montrer alors que g est prolongeable par continuité en 0 puis déterminer son prolongement G.

3°) a) Montrer que pour tout $x>0$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{x}\leq g(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{x}$; en déduire la limite de g en $+\infty$.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4°) Dans la figure ci-contre, c_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases} g(x)-x & , si \ x\neq 0 \\ 1 & , si \ x=0 \end{cases}$$



a) En utilisant le graphique ci-contre, montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans IR .

b) Vérifier que $0,9<\alpha<1$.

Taki Academy
www.takiacademy.com

MAGAZINES

Nos Locaux

- Sahloul
- Khezama
- Msaken
- Monastir
- Mahdia
- Kasserine
- CUN
- Ksar Hellal
- Ezzahra
- Tataouine
- El Aouina
- El Mourouj
- Bardo
- Bizerte
- Nabeul
- Kelibia
- Gafsa
- Tozeur
- kébili
- Gabes
- Siliana
- Sfax
- Béja
- Le Kef
- Zaghouan
- Kairouane
- Jendouba
- Sidi Bouzid
- Medenine
- Djerba

تهنى على قرايتك